CS 06 Spécialité maths Jeudi 8 Février 2024 Gr Thiaude P.
Calculatrice autorisée en mode EXAMEN durée = 1h

NOM :

Exercice 1 [9 points : 2 pts + 3 pts + 4 pts]
Résoudre :
1. $\ln(x) = -2$ **2.** $e^x \leqslant 3$ **3.** $\ln(6x+4) + \ln(2x+1) = \ln(x+1)$.

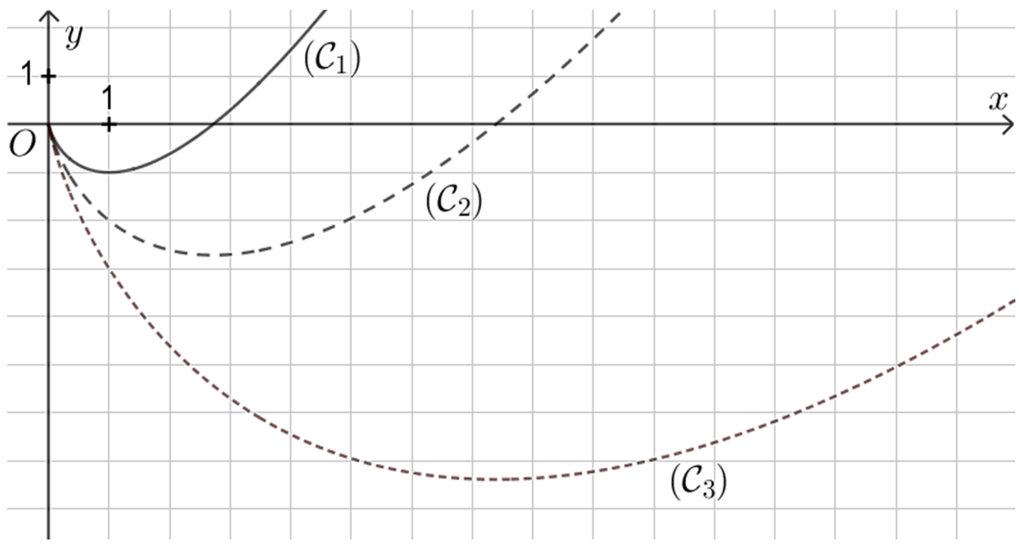
Problème [11 points]
Le plan est muni d'un repère orthogonal.

Partie I Étude d'une fonction particulière
Soit f_1 définie sur $\mathcal{D} =]0\,;\,+\infty[$ par : $f_1(x) = x\ln(x) - x$ et on note $(\mathcal{C}_1)$ sa courbe représentative.

1. Déterminer $f_1{}'(x)$, en étudier le signe, dresser de tableau de variation de f_1 sans les limites.
2. La courbe $(\mathcal{C}_1)$ coupe l'axe des abscisses en B_1: déterminer l'abscisse α_1 de B_1 puis l'équation réduite de la tangente T_1 à $(\mathcal{C}_1)$ en B_1.
3. Étudier la convexité de f_1.

Partie II Étude d'une famille de fonctions (f_n) où $n \in \mathbb{N}^*$
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est définie sur $\mathcal{D} =]0\,;\,+\infty[$ par $f_n(x) = x\ln(x) - nx$ et on note $(\mathcal{C}_n)$ sa courbe représentative.

1. Calculer $f_n{}'(x)$, en étudier le signe puis dresser le tableau de variation de f_n sans les limites.
2. La courbe $(\mathcal{C}_n)$ coupe l'axe des abscisses en B_n.
   a. Déterminer l'abscisse α_n de B_n.
   b. On note T_n la tangente à $(\mathcal{C}_n)$ en B_n: les droites T_n, $n \in \mathbb{N}^*$, sont-elles parallèles entre-elles ?
3. On note A_n le point de $(\mathcal{C}_n)$ d'abscisse $x_n = e^{n-1}$.
   a. Déterminer l'ordonnée y_n de A_n en fonction de n.
   b. Démontrer que les points A_n, $n \in \mathbb{N}^*$, sont alignés et donner l'équation réduite de la droite d les contenant tous.
4. On a représenté ci-dessous $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_3)$: placer A_1, tracer d puis placer A_2 et A_3 ainsi que les tangentes à $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_3)$ en A_1, A_2 et A_3 respectivement.



5. Déterminer la limite de la suite (x_n).
6. BONUS : les droites (A_nB_n), $n \in \mathbb{N}^*$, sont-elles parallèles entre-elles ?

Corrigé

Exercice 1

1. $\ln(x) = -2$

• domaine d'existence : $\mathcal{D} =]0; +\infty[$

• résolution :

Pour tout $x \in \mathcal{D}$ on a les équivalences :

$$\ln(x) = -2 \Leftrightarrow e^{\ln(x)} = e^{-2} \Leftrightarrow x = e^{-2}$$

$e^{-2} \in \mathcal{D}$ donc est accepté

$\boldsymbol{S = \{e^{-2}\}}$

2. $e^x \leqslant 3$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a les équivalences :

$e^x \leqslant 3 \Leftrightarrow \ln(e^x) \leqslant \ln(3) \Leftrightarrow x \leqslant \ln(3)$

$\boldsymbol{S =]-\infty; \ln(3)]}$

3. $\ln(6x+4) + \ln(2x+1) = \ln(x+1)$.

• Domaine d'existence :

$$\begin{cases} 6x+4>0 \\ 2x+1>0 \\ x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x>-4 \\ 2x>-1 \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{4}{6} \\ x>-\dfrac{1}{2} \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{2}{3} \\ x>-\dfrac{1}{2} \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$$

$\mathcal{D} = \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

• Résolution :

Rappel : pour $a > 0$ et $b > 0$ on a : $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$

Pour tout $x \in \mathcal{D}$ on a les équivalences :

$$\begin{aligned} &\ln(6x+4) + \ln(2x+1) = \ln(x+1) \\ \Leftrightarrow\ &\ln[(6x+4)(2x+1)] = \ln(x+1) \\ \Leftrightarrow\ &(6x+4)(2x+1) = x+1 \\ \Leftrightarrow\ &12x^2 + 6x + 8x + 4 = x+1 \\ \Leftrightarrow\ &12x^2 + 14x + 4 - x - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ &12x^2 + 13x + 3 = 0 \end{aligned}$$

$12x^2 + 13x + 3$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 12$, $b = 13$ et $c = 3$, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 13^2 - 4(12)(3) = 25$.

$\Delta > 0$ donc $12x^2 + 13x + 3$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-13-\sqrt{25}}{2(12)} = \frac{-13-5}{24} = \frac{-18}{24} = -\frac{3}{4}$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-13+\sqrt{25}}{2(12)} = \frac{-13+5}{24} = \frac{-8}{24} = -\frac{1}{3}$$

Or : $-\frac{3}{4} \notin \mathcal{D}$ donc est refusé et $-\frac{1}{3} \in \mathcal{D}$ donc est accepté, finalement : $\boldsymbol{S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}}$.

Problème

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

Partie I Étude d'une fonction

$\forall x \in \mathcal{D} =]0\,; +\infty[$, $f_1(x) = x\ln(x) - x$; $(\mathcal{C}_1)$ est sa courbe représentative

1. **Déterminer $\boldsymbol{f_1'(x)}$, en étudier le signe, dresser de tableau de variation de $\boldsymbol{f_1}$ sans les limites.**

   • **calcul de $\boldsymbol{f_1'(x)}$**

   f_1 est produit et différence de fonctions dérivables sur leurs ensembles de définition respectifs donc elle est dérivable sur $\mathcal{D}$

   $f_1(x) = x\ln(x) - x$

Rappel : $(u \times v)' = u' \times v + v' \times u$ et $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

$f_1{}'(x) = 1 \times \ln(x) + \dfrac{1}{x} \times x - 1$
$f_1{}'(x) = \ln(x) + 1 - 1$
$f_1{}'(x) = \ln(x)$
On a donc : $\boldsymbol{\forall x \in \mathcal{D}, f_1{}'(x) = \ln(x)}$.

• signe de $\boldsymbol{f_1{}'(x)}$ et sens de variation de $\boldsymbol{f_1}$
Cherchons pour quelles valeurs de x on a : $\ln(x) > 0$.
Pour $x \in \mathcal{D}$, on a les équivalences :

$$\ln(x) > 0 \Leftrightarrow e^{\ln(x)} > e^0 \Leftrightarrow x > 1$$

Le signe de $f_1{}'(x)$ donne le sens de variation de f :

- $f_1{}'(x) > 0$ sur $]1\,;\,+\infty[$ et f_1 est continue sur $[1;+\infty[$ donc f_1 est strictement croissante sur $[1;+\infty[$
- $f_1{}'(x) < 0$ sur $]0\,;\,1[$ et f_1 est continue sur $]0\,;\,1]$ donc f_1 est strictement décroissante sur $]0\,;\,1]$
- $f_1{}'(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$

On a : $f_1(1) = 1 \times \ln(1) - 1 = 1 \times 0 - 1 = -1$.

Tableau de variation de $\boldsymbol{f_1}$:

x	0		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
Sens de variation de f_1	‖	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

2. **La courbe $(\mathcal{C}_1)$ coupe l'axe des abscisses en B_1: déterminer l'abscisse α_1 de B_1 puis l'équation réduite de la tangente T_1 à $(\mathcal{C}_1)$ en B_1.**

• calcul de abscisse $\boldsymbol{\alpha_1}$
α_1 est la solution de l'équation $f_1(x) = 0$.
Pour $x \in \mathcal{D}$, on a les équivalences :
$x\ln(x) - x = 0 \Leftrightarrow x(\ln(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) - 1 = 0 \;\; (x \neq 0) \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Leftrightarrow e^{\ln(x)} = e^1$
$\Leftrightarrow x = e$
Conclusion : $\boldsymbol{\alpha_1 = e}$.

• équation réduite de $\boldsymbol{T_1}$
T_1 admet pour équation : $y = f_1'(e)(x - e) + f_1(e)$.
Or, $f_1'(e) = \ln(e) = 1$ et $f_1(e) = 0$, on obtient : $y = 1(x - e) + 0$ autrement dit : $y = x - e$
L'équation réduite de $\boldsymbol{T_1}$ est : $\boldsymbol{y = x - e}$.

3. **Convexité de $\boldsymbol{f_1}$**

$f_1{}'$ est dérivable sur $\mathcal{D}$ et $f_1{}''(x) = \dfrac{1}{x}$
Pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f_1{}''(x) > 0$ donc f_1 est convexe sur $\mathcal{D}$.

Partie II Étude d'une famille de fonctions

$n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathcal{D} =]0\,;\,+\infty[$, $f_n(x) = x\ln(x) - nx$; $(\mathcal{C}_n)$ est sa courbe représentative

1. Calculer $\boldsymbol{f_n{}'(x)}$, en étudier le signe puis dresser le tableau de variation de $\boldsymbol{f_n}$ sans les limites.

$f_n(x) = x\ln(x) - nx$

$f_n'(x) = 1 \times \ln(x) + \dfrac{1}{x} \times x - n$

$\boldsymbol{\forall x \in \mathcal{D}, f_n'(x) = \ln(x) + 1 - n}$.

Cherchons pour quelles valeurs de x on a : $\ln(x) + 1 - n > 0$.

Pour $x \in \mathcal{D}$, on a les équivalences :

$$\ln(x) + 1 - n > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > -1 + n \Leftrightarrow e^{\ln(x)} > e^{-1+n} \Leftrightarrow x > e^{n-1}$$

Le signe de $f_n{}'(x)$ donne le sens de variation de f_n :

- sur $]e^{n-1}; +\infty[$, $f_n'(x) > 0$ et f_n est continue sur $[e^{n-1}; +\infty[$, donc $f_n \nearrow$ sur $[e^{n-1}; +\infty[$
- sur $]0; e^{n-1}[$, $f_n'(x) < 0$ et f_n est continue sur $]0; e^{n-1}]$, donc $f_n \searrow$ sur $]0; e^{n-1}]$

On a :

$f_n(e^{n-1}) = e^{n-1}\ln(e^{n-1}) - n \times e^{n-1} = e^{n-1}(n-1) - ne^{n-1} = ne^{n-1} - e^{n-1} - ne^{n-1}$
$= -e^{n-1}$

tableau de variation de $\boldsymbol{f_n}$

x	0		e^{n-1}		$+\infty$
$f_n'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Sens de variation de f_1	‖	↘	$-e^{n-1}$	↗	

2. La courbe $(\mathcal{C}_n)$ coupe l'axe des abscisses en B_n.

a. abscisse $\boldsymbol{\alpha_n}$ de $\boldsymbol{B_n}$

Pour $x \in \mathcal{D}$ on a les équivalences : $f_n(x) = 0 \Leftrightarrow x\ln(x) - nx = 0 \Leftrightarrow x(\ln(x) - n) = 0$.
$\Leftrightarrow \ln(x) - n = 0 \;\; (x \neq 0) \Leftrightarrow \ln(x) = n \Leftrightarrow e^{\ln(x)} = e^n \Leftrightarrow x = e^n$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{\alpha_n = e^n}$.

b. Les droites $\boldsymbol{T_n}$, $\boldsymbol{n \in \mathbb{N}^*}$, sont-elles parallèles entre-elles ?

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la droite T_n admet pour coefficient directeur

$$f_n'(\alpha_n) = \ln(e^n) + 1 - n = n + 1 - n = 1$$

Toutes les droites T_n, $n \in \mathbb{N}^*$, admettent pour coefficient directeur la constante 1
donc les droites T_n, $n \in \mathbb{N}^*$, sont parallèles entre-elles.

3. On note $\boldsymbol{A_n}$ le point de $\boldsymbol{(C_n)}$ d'abscisse $\boldsymbol{x_n = e^{n-1}}$.

a. Déterminer l'ordonnée $\boldsymbol{y_n}$ de $\boldsymbol{A_n}$.

$A_n(x_n; y_n) \in \mathcal{C}_n$ donc $y_n = f(x_n)$, d'où $y_n = f(e^{n-1}) = -e^{n-1}$ (voir tableau de variation)

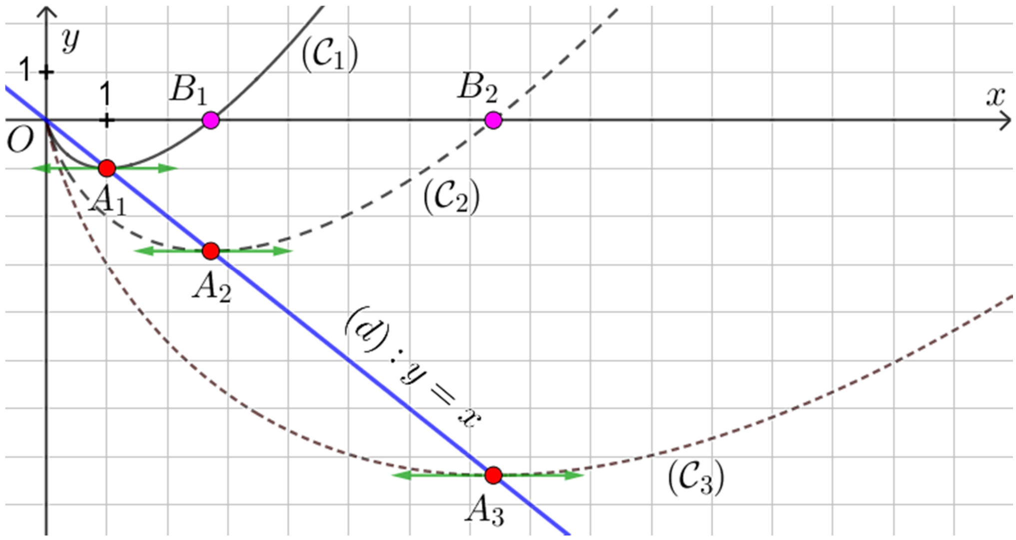
Finalement : $\boldsymbol{y_n = -e^{n-1}}$.

b. Démontrer que les points $\boldsymbol{A_n}$, $\boldsymbol{n \in \mathbb{N}^*}$, sont alignés suivant une droite $\boldsymbol{d}$ dont on donnera l'équation réduite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $x_n = e^{n-1}$ et $y_n = -e^{n-1}$ donc $y_n = -x_n$ ce qui montre que A_n appartient à la droite d'équation $y = -x$.

Conclusion : **les points $\boldsymbol{A_n}$, $\boldsymbol{n \in \mathbb{N}^*}$, appartiennent à $\boldsymbol{d}$ d'équation réduite $\boldsymbol{y = -x}$.**

4. Placer A_1, tracer d puis placer A_2 et A_3 et les tangentes en ces points à (C_1), (C_2), (C_3)



5. Limite de la suite (x_n)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, x_n = e^{n-1}$.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-1) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{n-1} = \lim\limits_{N\to+\infty} e^N = +\infty\ (cours)$

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

<u>Complément</u>

On peut montrer que la suite (x_n) est géométrique.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = e^{n-1}$, donc :

$$x_{n+1} = e^{n+1-1} = e^{n-1+1} = e^{n-1} \times e^1 = x_n \times e$$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_{n+1} = e \times x_n$ et e est une constante, donc la suite (x_n) **est géométrique de raison e**.

6. <u>BONUS</u> : les droites (A_nB_n), $n \in \mathbb{N}^*$, sont-elles parallèles entre-elles ?

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$A_n(x_n\,; y_n)$ avec $x_n = e^{n-1}$ et $y_n = -e^{n-1}$ donc $A_n(e^{n-1}; -e^{n-1})$

$B_n(\alpha_n\,; 0)$ avec $\alpha_n = e^n$ donc $B_n(e^n; 0)$

On a $n-1 \neq n$ donc $e^{n-1} \neq e^n$ par conséquent la droite (A_nB_n) n'est pas verticale ; elle admet pour coefficient directeur :

$$\frac{y_{B_n} - y_{A_n}}{x_{B_n} - x_{A_n}} = \frac{0 - (-e^{n-1})}{e^n - e^{n-1}} = \frac{e^{n-1}}{e^{n-1}(e^1 - 1)} = \frac{1}{e-1}$$

Les droites (A_nB_n) ont toutes pour coefficient directeur la constante $\frac{1}{e-1}$ donc elles sont parallèles entre-elles.

Résumons : **toutes les droites (A_nB_n) sont parallèles entre-elles**.

<u>Complément</u>

$$x_{B_n} = \alpha_n = e^n = e^{n+1-1} = e^{(n+1)-1} = x_{A_{n+1}}$$

par conséquent les **points B_n et A_{n+1} sont une même droite verticale**.